ISARA Lyon Durée 1h

UP SFO- S4 – UE : Statistique

Examen N°3 (34%) partie 7– 15 juin 2011

Mme Bottollier Lemallaz CORRIGE EN BLEU

Conditions d’examen : **Documents**: Tables statistiques autorisées

**Calculatrice** : non programmable

Remarques importantes :

1. A la fin de l’épreuve vous devez rendre les 4 pages du sujet complétées de façon lisible et propre.
2. Sauf indication contraire, vous présenterez les résultats finaux avec 3 chiffres significatifs.

**Nom :……………………………………………………………….Prénom :……………………………………………….Note sur 20 :……….**

**Evaluation du cours (6 points) (15 min):**

Soit un modèle de régression linéaire multiple du 1er degré à k facteurs, expliciter la matrice d’information associée à ce modèle : dimension et termes qui la constituent.

i = 0 + 1 Ui1 + 2 Ui2 +....+ j Uij +.....+ k Uik

Dim U’U = [k+1 ; k+1]

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | ΣU1 | ΣU2 | ..... | ΣUk |
| ΣU1 | ΣU1² | ΣU1 U2 | …. | ΣU1 Uk |
| ΣU2 | ΣU2 U1 | ΣU2² | …. | ΣU2 Uk |
| …. | …. | …. | …. | …. |
| ΣUk | ΣUk U1 | ΣUk U2 | …. | ΣUk² |

**Exercice de réflexion (4points) (10 min) :**

*Toutes traces de recherches, même infructueuses, seront prises en compte dans la correction de l’exercice.*

Soit le plan expérimental associé au modèle : = 0 + 1 Ui1 + 2 Ui2 + 3 Ui3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| essai | U1 : t (min) | U2 : pH | U3 : T° (°C) |
| 1 | 10 | 2 | 220 |
| 2 | 12 | 2 | 218 |
| 3 | 10 | 4 | 218 |
| 4 | 12 | 4 | 220 |
| Moyenne Uoj | 11 | 3 | 219 |
| écart type s(Uj) | 1 | 1 | 1 |

Vous allez retranscrire ce plan en une matrice expérimentale en remplaçant les valeurs d’Uij par celles de Xij tel que chaque Xij correspond à la variable centrée réduite de chaque Uij

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| essai | X1 | X2 | X3 | Xj = (Uj – U0j) / s(Uj) |
| 1 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 |

Construisez la matrice de dispersion utilisée pour calculer les coefficients du modèle de la forme

= '0 + '1 Xi1 + '2 Xi2 + '3 Xi3

*La matrice des effets X est orthogonale, on en déduit pour (X’X)-1*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0,25 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0,25 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0,25 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0,25 |

**Exercice d’application (10 points) (30 min) :**

Pour optimiser les quantités de carpes pêchées pendant la période estivale dans 9 étangs de la Dombes, un auteur étudie trois facteurs pouvant influencer les rendements des pêches. Le premier facteur est l'orientation (sinus d’un angle) de l'entrée de la zone de piégeage. Le deuxième facteur est un rapport entre la hauteur d'eau en sortie dans la zone de piégeage et celle de l'entrée. Pour finir, le dernier facteur est la charge initiale de carpes rapportées à l'hectare.

La réponse mesurée Y représente la quantité de carpes pêchées lors de la première pêche estivale, on admettra qu’elle suit une loi normale. Le plan d’expérience utilisé ainsi que les résultats observés sont donnés dans les tableaux ci-dessous.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N° | U1 | U2 | U3 |  | Y |
| Etang | Orientation | Sortie/entrée | Charge |  | Poids pêché (kg) |
| 1 | -0,96 | 0,4 | 187,5 |  | 528 |
| 2 | 0,65 | 0,1 | 180 |  | 298 |
| 3 | -0,87 | 0,21 | 250 |  | 447 |
| 4 | 0 | 0,62 | 242,86 |  | 1287 |
| 5 | -0,13 | 0,43 | 130,77 |  | 760 |
| 6 | -0,3 | 0,48 | 225 |  | 501 |
| 7 | 0,58 | 0,07 | 133,33 |  | 17 |
| 8 | -0,87 | 0,33 | 193,55 |  | 350 |
| 9 | 0,89 | 0,5 | 666,67 |  | 806 |
| ***Somme*** | ***-1,01*** | ***3,14*** | ***2209,68*** |  | ***4994,00*** |
| ***SC*** | ***4,0933*** | ***1,3776*** | ***756450,4028*** |  | ***3824792,00*** |

1. Les 4 matrices calculées pour déterminer les coefficients du modèle sont dans l’annexe 1 ; A vous de les compléter et de reconnaitre ces matrices pour écrire l’équation du modèle retenu :

Y^ = **-19,409** + 94,052 U1+1804,801 U2 - 0,183U3

1. Sous forme d’un tableau, valider la pertinence du modèle en complétant et en vous aidant des résultats de l’annexe 2.

Quelles sont vos hypothèses et conclusions ?

On pose: H0 : CM  / CM e = 1

H1 : CM  / CM e >1 le modèle est satisfaisant (test unilatéral)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Source des variations | SCE | ddl | CM | F | p- value |
| Expliquée par la régression | 833584,37 | 3 | 277861,457 | 6,312 | 0,0375 |
| Expérimentale ou résiduelle | 220092,519 | 5 | 44018,5038 |  |  |
| totale | 1053676,89 | 8 |  |  |  |

Conclusion : Si on rejette Ho on a 3,75% de risque d’erreur, ce risque est < à 5%, on peut donc accepter l’hypothèse H1 , on a pu mettre en évidence que le modèle est satisfaisant.

1. Discutez la significativité du coefficient du facteur U2. Justifiez.

On pose: H0: j = 0

H1 : j 0 effet du régresseur Uj (test bilatéral)

Var ( B ) = CMe ( X ' X ) -1

(b2) = racine (4,824997036\*44018,5038) = 460,457

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| sigma² b2 | sigma b2 | b2 | t calc | significativité |
| 212389,150 | 460,857 | 1804,801 | 3,9162 | \* |

t0,975 ( 5) = 2,571 t0,995 ( 5) = 4,032 t0,9995 ( 5) = 6,859

Conclusion : t0,975 ( 5) < tcalc < t0,995 ( 5), on a pu mettre en évidence un effet significatif du facteur U2 (sortie/entrée) sur le rendement de la pêche avec moins de 5% de risque d’erreur

1. Sachant que l’analyse entière a montré que les facteurs U1 et U3 n’ont pas montré des effets significatifs, quelle réponse apporteriez- vous à cette étude ?

Le modèle retenu sera : Y^ = **0** +1804,801 U2

Le coefficient est positif, pour maximiser Y il faut mettre le facteur à son niveau haut. Pour optimiser le rendement on préconise un rapport sortie /entrée de la hauteur d’eau vers son maximum à 0,62 (voir valeur dans le plan expérimental).

Annexe 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,65020714 | 0,081195025 | -0,889011597 | -0,000895316 |  | **4994,000** |
| 0,08119502 | 0,351047959 | 0,474902839 | -0,000845096 |  | **-528,470** |
| -0,88901160 | 0,474902839 | 4,824997036 | -0,003018416 |  | 2219,780 |
| -0,00089532 | -0,000845096 | -0,003018416 | 0,000007550 |  | 1396406,150 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9,0000 | -1,0100 | 3,1400 | 2209,6800 |  | **-19,409** |
| -1,0100 | 4,0933 | -0,5031 | 137,2791 |  | 94,052 |
| 3,1400 | -0,5031 | 1,3776 | 866,8439 |  | 1804,801 |
| 2209,6800 | 137,2791 | 866,8439 | 756450,4028 |  | -0,183 |

Annexe 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Y | Y^ | e |
|  | 528 | **577,9911** | **-49,9911** |
|  | 298 | **189,3441** | **108,6559** |
|  | 447 | 232,1335 | 214,8665 |
|  | 1287 | 1055,2308 | 231,7692 |
|  | 760 | 720,5551 | 39,4449 |
|  | 501 | 777,6036 | -276,6036 |
|  | 17 | 137,1365 | -120,1365 |
|  | 350 | 459,0152 | -109,0152 |
|  | 806 | 844,9901 | -38,9901 |
| ***somme*** | ***4994,00*** | ***4994,0000*** | ***0,0000*** |
| ***SC*** | ***3824792,00*** | ***3604699,4810*** | ***220092,5190*** |